Esercizi svolti - Integrazione di funzioni razionali - AD

1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2x+5}{\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)}dx$$

determinano le due costanti A e B tali che:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-3}=\frac{(A+C)x^2+(-3A+B)x+C-3B}{(x^2+1)(x-3)}$$

Si osservi che quando un fattore del denominatore è di grado superiore al primo bisogna scrivere un polinomio di grado inferiore: $\frac{Ax+B}{x^2+1}$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B=2; \\ C-3B=5 \end{cases} \begin{cases} A=-C \\ B=2-3C \\ C-6+9C=5 \end{cases}; \begin{cases} A=-\frac{11}{10} \\ B=-\frac{13}{10} \\ C=\frac{11}{10} \end{cases}$$

e l'integrale diventa:

$$\int \frac{-\frac{11}{10}x-\frac{13}{10}}{x^2+1}dx+\int \frac{\frac{11}{10}}{x-3}dx=$$

Con banali calcoli si ha:

$$=-\frac{1}{10}\int \frac{11x-13}{x^2+1}dx+\frac{11}{10}\int \frac{1}{x-3}dx=-\frac{1}{10}\left[11\int \frac{x}{x^2+1}dx-13\int \frac{1}{x^2+1}dx\right]+\frac{11}{10}\ln|x-3|+c=$$

$$=-\frac{1}{10}\left[\frac{11}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx-13\int \frac{1}{x^2+1}dx\right]+\frac{11}{10}\ln|x-3|+c=$$

$$=-\frac{11}{20}\ln|x^2+1|-13\arctan gx+\frac{11}{10}\ln|x-3|+c=$$

2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{\left(x^3+x\right)}dx$$

Scomponiamo il denominatore:

$$\int \frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx$$

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{(x^2+1)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} ; \begin{cases} A=-B \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} ; \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{-x}{x^2+1}dx=\ln|x|+\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{x^2+1}dx=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c$$

3. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{1}{3x^2-2x+4}dx$$

Si verifica che il

$$\Delta=4-48<0$$

Mettiamo in evidenza il 3 al denominatore:

$$\int \frac{1}{3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)}dx$$

Aggiungendo e sottraendo al denominatore il coefficiente della x diviso per 2 ed elevato al quadrato, in modo da avere un quadrato di binomio, si ha:

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{11}{9}\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2+\left(\frac{11}{9}\right)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\frac{(3x-1)^2}{9}+\left(\frac{11}{9}\right)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{9}{(3x-1)^2+11}dx=$$

Dividendo al numeratore e al denominatore si ha:

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{9}{11}}{\frac{(3x-1)^2}{11}+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{9}{11}}{1+\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{3}{\sqrt{11}}\frac{3}{\sqrt{11}}}{1+\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)+c$$

4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int\frac{1}{x^2+3x+1}dx$$

Calcoliamo il

$$\Delta=9-4=5>0$$

Scomponiamo il denominatore, l'integrale diventa:

$$\int\frac{1}{\left(x-\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}dx$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\int\frac{1}{\left(\frac{2x+3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2}\right)}dx=4\int\frac{dx}{\left(2x+3+\sqrt{5}\right)\left(2x+3-\sqrt{5}\right)}$$

Decomponiamo in somma:

$$\frac{A}{\left(2x+3+\sqrt{5}\right)}+\frac{B}{\left(2x+3-\sqrt{5}\right)}=\frac{(2A+2B)X+(3-\sqrt{5})A+B(3+\sqrt{5})}{\left(2x+3+\sqrt{5}\right)\left(2x+3-\sqrt{5}\right)}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}2A+2B=0\\(3-\sqrt{5})A+(3+\sqrt{5})B=1\end{cases};\begin{cases}A=-B\\-(3-\sqrt{5})B+(3+\sqrt{5})B=1\end{cases};\begin{cases}A=-B\\(-3+\sqrt{5}+3+\sqrt{5})B=1\end{cases};$$

$$\begin{cases}B=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\\A=-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\end{cases}$$

Quindi:

$$\int\frac{1}{\left(x-\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}dx=4\left[\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{5}}}{(2x+3+\sqrt{5})}dx+\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}}{(2x+3-\sqrt{5})}dx\right]=$$

$$=4\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\int\frac{-1}{(2x+3+\sqrt{5})}dx+\int\frac{1}{(2x+3-\sqrt{5})}dx\right]=2\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[-\int\frac{2}{(2x+3+\sqrt{5})}dx+\int\frac{2}{(2x+3-\sqrt{5})}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+c$$

5. Calcolare il seguente integrale:

$$\int\frac{1}{\left(1+x^3\right)}dx$$

Scomponiamo il denominatore:

$$\int\frac{1}{\left(1+x^3\right)}dx=\int\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}dx$$

Decomponiamo in somma:

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}+=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases};\begin{cases} A=-B \\ C=1-A \\ -A-A-A=-1 \end{cases};\begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

L’integrale diventa:

$$\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx+\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2-x+1}dx+\frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx+\frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\left[\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\int \frac{1}{x^2-x+1}dx\right]+\frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx=$$

Calcoliamo a parte $\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx=\int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}}dx=\int \frac{1}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)}dx=$$

$$=\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)}dx=\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int \frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{4}+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=\int \frac{4}{(2x-1)^2+3}dx=\int \frac{\frac{4}{3}}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

Pertanto gli integrale dato è:

$$\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

6. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}dx$$

Scomponiamo il denominatore:

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}dx = \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2-2)}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2-2)}dx$$

Decomponiamo in somma:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-2} = \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(-2A-2B-C)x+(-2A+2B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2-2)}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ -2A-2B-C=1 \\ -2A+2B-D=0 \end{cases} ; \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=1 \\ D=0 \end{cases}$$

L'integrale dato diventa:

$$\int \frac{-1/2}{x-1}dx + \int \frac{-1/2}{x+1}dx + \int \frac{x}{x^2-2}dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-2| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2-1}\right| + c = \ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}} + c$$

7. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^4+3x^3-x+1}{x^3+2x^2+x}dx$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ha:

$$\frac{x^4+3x^3-x+1}{x^3+2x^2+x}=x+1+\frac{(-3x^2-2x+1)}{x^3+2x^2+x}$$

Pertanto:

$$\int \frac{x^4+3x^3-x+1}{x^3+2x^2+x}dx=\int x+1dx+\int \frac{(-3x^2-2x+1)}{x^3+2x^2+x}dx=\frac{x^2}{2}+x-\int \frac{3x^2+2x-1}{x^3+2x^2+x}dx$$

Calcoliamo a parte $\int \frac{3x^2+2x-1}{x^3+2x^2+x}dx=\int \frac{3x^2+2x-1}{x(x+1)^2}dx$

Applicando la decomposizione in somma:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)(x+1)^2}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}A+B=3\\2A+B+C=2;\\A=-1\end{cases}\begin{cases}A=-1\\B=4\\C=0\end{cases}$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{4}{x+1}dx=-\log|x|+4\log|x+1|+c$$

Tornando all'integrale dato si ha:

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|x| - 4\log|x+1| + c$$